

**是偶然也是必然
這就是為何量子力學如此
吸引人的原因**

龍 行 天

大同大學電資學院物理組講師

是偶然也是必然

這就是為何量子力學如此吸引人的原因

龍行天

摘 要

隨著實驗設備與分析能力的提升，十九世紀末的物理學者從實驗中發現許多古典物理無法解釋的現象。例如，為何氫原子光譜會出現規則的系列公式？為何古典理論所推導的黑體頻譜分佈出現發散的結果？原子的模型什麼？…。為了解釋這些古典物理無法說明清楚的實驗現象，二十世紀初的物理學者(普朗克、愛因斯坦、拉賽福、波耳、德布羅意、海森堡、薛丁格、波恩、包立狄、拉克……)陸續的提出許多有別於古典物理卻又不違背古典理論的假設與論述，在不斷的驗證與確認下，經歷了約26年的時間(1900~1926)，大多數不成熟的假說被遺棄，而最後留下來的精髓成為量子力學理論建構的基石。本文主要介紹的就是量子物理的演化與量子力學的兩大理論基石『不確定性原理』與『波函數的機率統計詮釋』。雖然『矩陣力學』(量子力學的第一套版本)與『波動力學』(量子力學的第二套版本)是由不同的兩條路徑所得到的兩套力學，起初這兩個看似不協調的理論，最後發現其實是同一件事，只是描述的方式不同罷了，在不確定原理與波函數的統計詮釋的基礎下這兩套力學其實是完全等價的，這奇妙的結果是偶然，也是必然，這就是為何量子力學如此吸引人的原因。

關鍵字：不確定性原理、波函數的機率統計詮釋、量子力學

Fortuity and Inevitability This Is Why Quantum Mechanics Is So Compelling

Lung- hsing Tian

Abstract

With the upgrading of laboratory equipment and analysis capabilities, physicists found that many phenomena seen in experiments can not be explained by using classical physics. For example, why does the hydrogen atom spectrum show regular series formula? What is the cause of the fine structure of the spectrum? Why does the blackbody spectral distribution results derived from classical theory show divergence? What is the model of the atom? For explaining these strange and special phenomena, physicists in the early twentieth century (Planck, Einstein, Rutherford, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Born, Pauli, Dirac, and so on) had raised many innovative hypotheses and concepts. After continually verified and validated for about 26 years (from 1900 to 1926), most immature hypotheses and concepts were abandoned and the essence of the theory was left and became the cornerstone of the construction of quantum mechanics. This paper describes the evolution of quantum physics and its theoretical foundations of uncertainty principle and statistical probability interpretation.

Key words : *uncertainty principle, statistical probability interpretation, quantum mechanics*

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

壹、前言

馬克斯威爾(J.C. Maxwell)於1867年將電磁理論大一統後，赫茲(H. Hertz)於1887年由電路設計證實了電磁波的存在，十九世紀的物理學者幾乎已確信自然界所有的物理現象都可由古典力學，電磁學與統計熱力學獲得完美的解釋。古典物理大師凱恩(W. T. Lord Kelvin)認為整個物理似乎只存有兩個待解的難題，一是尋找以太(ether)介質，二是解釋為何固體在低溫下的莫耳比熱 $C_v \propto T^3$ ？

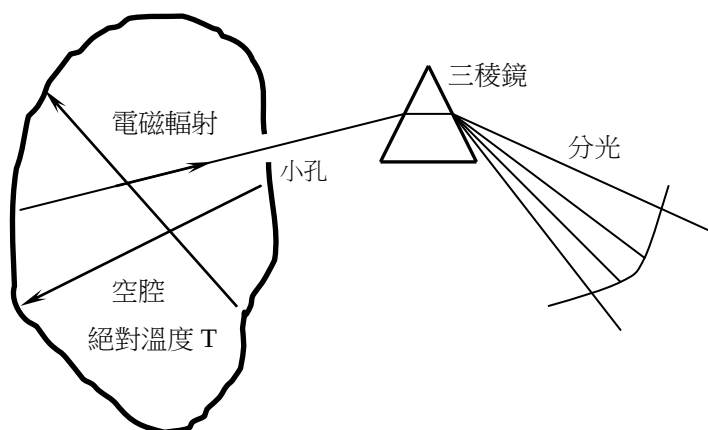
邁克森(Michelson)與莫理(Morley)於1884-1887年間利用他們所設計的干涉儀進行了一連串測量以太風的實驗，實驗結果引發了一些物理學者開始相信宇宙中應沒有以太介質的存在，也就是光可能不需要介質也可以傳遞能量。愛因斯坦(Albert Einstein)相信以太是不存在的，他提出時間再校正與長度再測量的思想實驗，在『光速恆定』與『慣性系的物理具不變性』的兩個基本假設下完成了狹義相對論的理論建構，理論中發現當物體速度接近光速時古典力學將無法解釋物體所有的力學現象，這個革命性的理論為古典物理的擁護者投下了極大的震撼彈，而前述的另一個難題（固體莫耳比熱）要等到下一個世紀才獲得解決。

隨著實驗設備與分析能力的提升，十九世紀末的物理學者從實驗中發現許多古典物理無法解釋的現象，例如氫原子光譜實驗中所獲得系列的經驗公式原因？為何某些光譜會出現精細分裂(fine structure)的現象？為何古典理論所推導的黑體的頻譜分佈出現發散的結果？『原子』的內部結構是什麼？...。為了解釋這些古典物理無法說明清楚的實驗現象，許多的物理學者陸續的提出許多有別於古典物理卻又不違背古典理論的假設與論述，在不斷的驗證與確認下，經歷了約26年的時間，大多數不成熟的假說與論述被遺棄，而最後留下來的精髓成為量子力學理論建構的基石。本文主要介紹的就是量子力學理論建構的基礎『波函數的機率統計詮釋』與『不確定性原理』的演化史。

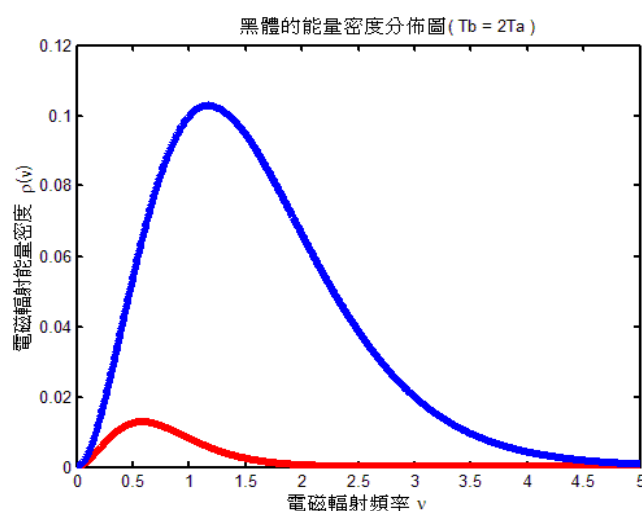
貳、黑體輻射與普朗克的振子能量量子化假說

絕對溫度 T 的物體向其外部輻射電磁能量的現象稱熱輻射(thermal radiation)。對大多數的熱輻射體而言，物體的輻射能力與材質、形狀與溫度有關，例如相同溫度的鐵塊與木塊它們的熱輻射的能力是不同的。同樣的，相同材質的熱輻射體在不同溫度下的熱輻射能力也不盡相同。實驗同時發現某些特別的熱輻射體的輻射能力與材質、形狀無關，只與絕對溫度有關，物理稱這類的輻射體為黑體(blackbody)或稱完全的熱輻射體。由熱力學可以證明一個絕對溫度 T 的金屬空腔內的電磁能量密度 ρ ，可藉由空腔壁上的一塊小面積所輻射的強度 R ，在等比例的輻射下完全的等效($R = c\rho/4$)，因此空腔壁上的小面積可視為一個完全的熱輻射體（即黑體）。為了瞭解黑體在不同溫度的頻譜分佈，可藉由空腔實驗(Cavity experiment)達成（見圖一），一個金屬空腔的表面挖了一個小孔(hole)，內部放置一個加熱器，空腔的外面用絕緣材料將空腔包覆之。因空腔表面的孔很小，所以外面的輻射能量不會進入空腔內，而空腔內壁上的原子因受熱作用會釋放電磁輻射於空腔的內部，電磁輻射在空腔內傳輸的過程中部分的能量將等比例的由小孔輻射到空腔外部，借由分光技術所測得的輻射強度 $R(\nu)$ ，可間接的獲得空腔內部電磁輻射的頻譜(見圖二)。1890年代的物理學者已可正確的獲得不同溫度黑體的頻譜分佈，但對於為何會出現這樣的結果，當時的理論無法分析清楚，雖然實驗的數據分析已獲得一些重要的經驗公式。

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因



圖一：空腔輻射實驗裝置圖



圖二：兩種不同溫度的黑體之頻譜分佈圖，圖中頻譜面積大者的溫度較高；頻譜面積小者的溫度較低。

早期的物理學者對黑體的頻譜進行理論分析，最為著名的是1895年由瑞里-琴 (Rayleigh-Jeans)所提出的古典理論，這套理論在低頻區(長波長區)與實驗吻合，但在高頻區(短波長區)卻出現發散的結果，物理稱這發散現象為紫外崩潰(UV catastrophe)。1900年10月德國理論物理學家普朗克(M. Planck)對黑體輻射進行分析¹，他認為瑞里的輻射理論失敗的根本原因是振子的平均能量與頻率無關的結果，

¹ Rybicki & Lightman 1979. p.22

他將實驗所得的高頻區適用的經驗公式(又稱維恩定律Wien's law)與瑞里所推得的低頻區適用的古典公式，利用熱力學二定律與內插法，湊出高頻與低頻區皆適合的振子平均能量公式 $\bar{\varepsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$ ，式中發現振子的平均能量與頻率有關，經計算發現電磁頻譜分佈與實驗結果吻合。因為這結果是由數學所湊出來的，在理論上不夠完備，為了強化理論的正確與完備性，普朗克於1900年的12月提出了過去古典物理所不曾出現的『簡諧振子能量量子化分佈』的假說 (Planck postulate)，由這個假設配合古典統計波茲曼分佈(Boltzmann distribution)，可推導出與實驗吻合的正確輻射理論。

普朗克認為凡是以頻率 ν 做簡諧振盪的物理振盪系統，其吸收或釋放的能量為量子化分佈，或者說簡諧振子允許擁有的振盪能量是呈量子化分佈。

允許的振子能量（即允許吸收或釋放的能量） $E = nh\nu = n\hbar\omega$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 稱為量子數(Quantum number)。

$\omega = 2\pi\nu$ 為振盪的角頻率。

$h \cong 6.63 \times 10^{-34} \langle J \cdot s \rangle$ 稱為普朗克常數(Planck constant)

$\hbar = h/2\pi$ 稱為約化的普朗克常數。

乍看下普朗克的振子能量量子化分佈的假設似乎違背了古典物理認為能量為連續分佈的認知，但事實上它是一體兩面的。在巨觀實驗時振子的能量量子數 n 趨近無限大，此時能量進入古典連續分佈的區域，這假設完全沒有違反古典物理能量是連續分佈的結果，若硬將量子化假設來分析巨觀實驗的振子能量分佈，那麼我們也將感受不到振子的能量是不連續變化的（註：感受不到，測量不到，並不表示能量量子化是不存在的）。反之，對微觀系統（原子或分子尺寸格度）的諧振子而言，振子能量的量子化現象將會彰顯出來，此時量子化效應是重要且不可忽略的。普朗克成功解釋了黑體輻射頻譜分佈的成因，更重要的是他為第一位提出『量子論』的物理學者，為感念他的貢獻，後人稱普朗克為『量子物理之父』。

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

叁、光電效應實驗與愛因斯坦的光子論²

1900年代的物理學者發現，若將特定頻帶的電磁輻射照射於特定的金屬表面時，會出現一些古典物理無法解釋的現象，這現象稱光電效應。實驗中發現電磁輻射的能量應與頻率有關，而非古典理論認為電磁輻射的能量與電場平方成正比的結果（ $I_{\gamma} \propto |E|^2$ ），實驗也發現電磁輻射具有顆粒性的碰撞行為而非電磁波能量的累加。為解釋光電效應(photoelectric effect)實驗，愛因斯坦(A. Einstein)於1905年提出『電磁輻射具粒子性』的假設⁽²⁾。他接受普朗克的諧振子能量量子論，並認為一束以頻率 ν 傳遞的電磁輻射本身就是一個物理的振盪系統，所以電磁輻射的能量也應為量子化分佈，愛因斯坦進而將入射光視為由一顆顆稱為『光子』(photon)的粒子所組成，由狹義相對論質能轉換公式與光子靜止質量為零的條件下，可寫出波與粒子的關聯式：

$$\text{光子的能量： } E_{\gamma} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (\text{光子的能量與頻率有關})$$

$$\text{光子的動量： } p_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{光子的數目： } N = \frac{U_{EM}}{h\nu} = \text{光波的總能量} / \text{單一光子的能量。}$$

上述中 λ 與 ν 分別表示光子的波長與頻率

$$h \cong 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \text{ 為普朗克常數}$$

愛因斯坦認為入射光子的能量 E_{γ} 若大於物質的功函數 ϕ ，則光子會將能量完全交給束縛電子並將它激出，而多餘的光子能量將轉換成電子的動能 K 。反之，若入射光子的能量小於物質的功函數則無法擊出光電子。光子的顆粒性碰撞模型，可解釋為何光電子是即時被擊出的原因。1910年密立根(R. Millikan)於光電實驗證實了愛因斯坦的光子論的正確性，1923年康普頓(Compton)由高能量的X射線與碳靶的散射實驗中，精確的再為電磁輻射具有粒子性給出了有力證明。在此要注意

² Serway, Raymond; Jewett, John. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th. Cengage Learning, 2013. p.1194

的，一般書籍在解釋光電效應實驗特別強調光子的能量轉換，而談到康普頓散射則特別強調光子的動量，原因是光電效應的電子是束縛電子，束縛電子才可完全吸收光子的能量，而康普頓效應的電子是自由電子，自由電子是無法完全吸收光子能量的。其實無論那個實驗現象，都必需遵守動量與能量守恒律，至於是束縛電子還是自由電子則要由入射光子的能量與電子的束縛能比較來決定。

愛因斯坦的光子論是繼普朗克的簡諧振子能量量子化分佈假設的另一個重要的量子性假設，愛因斯坦不僅將物理的簡諧系統應用到電磁輻射，且將電磁振盪的能量顆粒化，清楚的描述了電磁輻射具有波與粒子的二象性(Wave-particle duality)，對以後的原子模型建立與量子物理的發展有關鍵性的貢獻。另外值得一提的，迪拜(P. Debye)於 1912 年將普朗克空腔輻射理論的分析方法複製到固體的莫耳比熱計算，推導出固體在低溫區的莫耳比熱與實驗吻合的結果 ($C_v \propto T^3$)，類似電磁輻射具有波與粒的二象性，固體內的原子因受熱振動所釋放的彈性波（縱波）也應有粒子的樣子，這就是聲子氣體(phonon gas)引入的原因。

肆、拉賽福的原子有核模型與原子光譜

1897年湯姆森(J.J. Thomson)於陰極射線實驗中發現電子的存在，1910年密立根(Millikan)在油滴實驗中確定電子的質量 $m_e \cong 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ ，電量 $e = -1.6 \times 10^{-19}$ 庫倫。將一個孤立帶電球的電位能與電子的靜止質能做聯結，可估計出電子的半徑約 $r_e \cong 10^{-15} \text{m}$ 等級，而原子內部存有電子在當時為物理與化學界普遍認定的事實。化學上由於原子質量單位($1 \text{amu} \cong 1.66 \times 10^{-27} \text{kg}$)的被定義與質譜儀實驗技術的提升，不同原子序的原子質量已被精確的測得，由物質的質量與亞加厥數 N_A 可估計一個原子的半徑大約 10^{-10}m 等級。由上述的說明知，原子內部有電子存在，原子的質量遠大於電子的質量，原子的半徑遠大於電子的半徑，中性原子內部存有

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

與電子電量相同的正電荷存在，那麼原子的幾何結構到底是什麼樣子？這是1900年代的物理學者想知道的。

1903年湯姆森(J.J. Thomson)首先提出一個原子的模型結構，又稱布丁-草莓模型(plum-Pudding model)，原子是由電子與半徑為 10^{-10}m 等級的正電球體所組成，電子嵌在正電球體內運動。這個模型的提出立刻受到多方的質疑，主要的原因有兩點，其一，由高斯定律得知電子在球體內的受力將造成電子在球體內做簡諧運動，由古典電磁輻射理論知電子在隧道內振盪所釋放的電磁波波長等級 $1000\text{\AA}$ ，這與當時氫原子光譜的巴曼序列(Balmer series)的可見光波段差距太大。其二，湯姆森的原子模型完全無法解釋 α 粒子的金箔散射實驗，在大角度下的理論散射結果與實驗所測到的 α 粒子數目差了約 10^{-2000} 等級。這兩項與實驗不合的結果，表明湯姆森的原子的模型是不正確的。

1907年拉賽福³ (Ernest Rutherford)由核衰變實驗確立所謂的 α 粒子就是氦核，氦核帶正電，電量為電子電量的兩倍，質量 4.003 amu 。受到李納德(Lenard)的電子束金屬散射實驗(1903)的影響，為驗證原子的內部是否真如李納德所說”是空的”結果，拉賽福與他的兩位助手蓋格(Geiger)和馬斯登(Marsden)設計了 α 粒子束的金箔散射實驗，將核衰變所釋放的 α 粒子經過速度選擇器精準射到一片金屬薄片上，以金屬薄片為中心，在各個不同的方位角測量被散射的 α 粒子的數目，實驗結果大出預料之外。實驗發現大多數的 α 粒子直接穿過金屬膜，但約有 $1/8000$ 的 α 粒子會反射到大於 90° 的散射角區域，不解的是從那來如此大的作用力將 α 粒子反射？原子內部結構到底是什麼樣子？為解釋這實驗現象，拉賽福於1911年提出原子是『有核的模型』，又稱行星運動模型，電子受庫倫力作用繞帶正電的核做圓周運動，核的半徑約 10^{-14}m ，原子的半徑就是電子繞核的軌道半徑，所以核的體積在整個原子體積中佔了極小的範圍，核的質量幾乎就是整個原子的質量，核的電量為原子序 Z 倍的電子電量。利用原子的有核模型，拉賽福進一步將古典力學

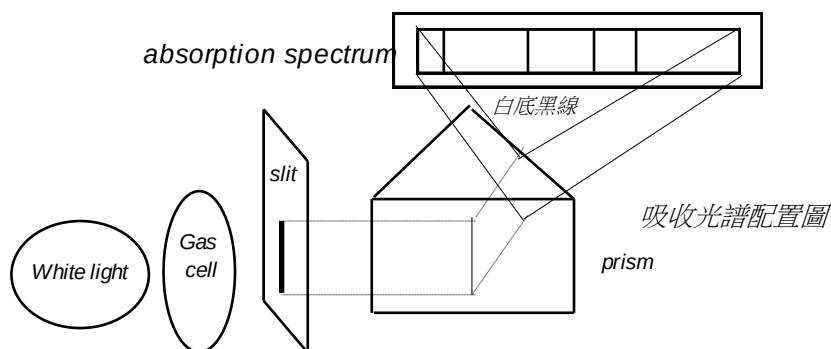
³ The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom, 21. May 1911: p. 669-688

與模型結合，經過理論推導獲得了著名的拉賽福 α 粒子的散射公式，式中可計算散射的 α 粒子在散射角 θ ，單位面積內的數目 $N(\theta) \propto 1/\sin^4(\theta/2)$ ，這理論與大角度實驗結果極為吻合，證實了原子的確是有核的模型。在此要注意的，小角度的散射為 α 粒子在靶內部多次散射下的平均結果，它與理論分析只有單核的散射結果不同，所以拉賽福 α 粒子的散射公式在小角度下與實驗結果有些出入，而大角度散射卻可視為一次散射下的結果，所以散射公式在大角度下與實驗結果吻合。拉賽福是研究核物理的先驅者，也是一位偉大的導師，他的學生中共有11人獲得諾貝爾物理獎，其中包含波耳（原子模型），迪拉克（量子力學貢獻），查得瑞克（發現中子）等。事實上拉賽福早在提出原子有核模型前就已成名，他因對核衰變的研究貢獻，於1907年獲得了諾貝爾化學獎，或許沒能獲得物理獎是他的遺憾，但他對量子物理的影響卻是卓著，深遠的。

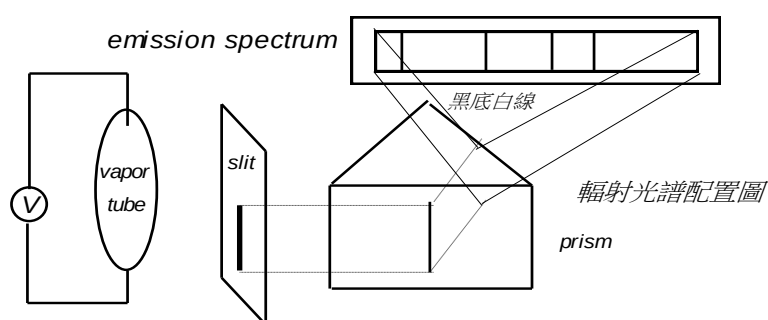
拉賽福所提出的原子模型於散射實驗得到了證實，原子的確是有核的，但接踵而來的質疑卻無法解釋。由電磁輻射理論知，加速或被減速的帶電粒子會釋放電磁輻射，那麼拉賽福原子模型中的電子在運轉的過程為何不會釋放能量而撞擊到原子核心？也就是原子應該會快速（約 10^{-11} 秒）塌陷成核的尺寸才對，可是事實上穩定的原子沒有塌陷的現象。另一難題是無法解釋原子連續與不連續光譜的成因，現在讓我們來瞭解原子光譜的實驗與演化。

原子光譜實驗可溯及久遠的年代，實驗發現用光照射、燃燒或用電子撞擊物質，物質會釋放出連續或不連續的特徵光譜線，不同的物質所釋放的光譜不同，光譜可作為辨別物種的依據。常見的光譜實驗為吸收光譜（見圖三），它是用全波段的白光照射原子或分子，原子會吸收某些特定波長的電磁輻射，利用特定波段的分光儀器將光譜分光，分光後感光片將呈現白底黑線的光譜分佈。另外也可利用加速的電子撞擊原子（見圖四），原子會釋放出特定的光譜線，分光後感光片將呈現黑底白線的光譜分佈。實驗發現吸收與輻射光譜的譜線彼此反置，輻射光譜比吸收光譜複雜許多，吸收光譜只是輻射光譜中某些特定譜線的重疊譜線。

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因



圖三：吸收光譜實驗圖



圖四：輻射光譜實驗圖

氫原子只有一個活性電子，是最簡單的原子，以氫原子來進行光譜分析是從事光譜研究者所關注的。1885年巴曼在氫原子光譜中整理出一條適合的經驗公式，稱為巴曼系列（譜線中有四條可見光，其他的都是紅外線）

$$\lambda_{\text{Balman}} \propto \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

1896年雷德堡將巴曼的經驗公式改寫成 $\frac{1}{\lambda} \Big|_{\text{Balmer}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)_{n=3,4,5,\dots}$

式子中 $R_H \cong 1.0967758 \times 10^7 / m$ 稱為雷德堡常數

1908年帕森巴克在氫原子光譜中整理出第二條經驗公式，稱為帕森巴克系列

$$\frac{1}{\lambda} \Big|_{\text{Paschen}} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)_{n=4,5,6,\dots} \quad (\text{譜線全為紅外線})$$

由上述的規律性，氫原子系列光譜通式： $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)_{n>m} = T_m - T_n$

$$\text{上式：} T_q \equiv \frac{R_H}{q^2} \text{ 稱光譜項，其中 } q=1,2,3,\dots$$

雖然由氫原子光譜獲得了這些漂亮，規律的經驗公式，但產生的物理機制是什麼？為何吸收光譜只是輻射光譜中某些特定譜線的重疊譜線？這些難題一直到1913年波耳提出的氫原子模型才被一一的解釋清楚

陸、波耳氫原子模型基本假設⁴

1912年年輕的丹麥物理學者波耳(Niels Bohr)當時在英國與拉塞福做研究，因此對原子的模型有了較多的了解，波耳深信微觀系統內粒子的力學行為與巨觀世界是截然不同的，原子的模型應與量子論有關聯，他提出了一些觀念，其中電子定態的強制性假設為說明微觀下的電子為何不會撞擊核心給出了一種嶄新的見解，另外由圓周運動與簡諧運動的相關性。波耳也試著將普朗克常數 h 引入原子模型中，但成效都不大。1913波耳回到丹麥繼續從事原子模型的研究工作，在一次偶然的機會，由朋友漢森處獲得了一份巴曼(Balman)於1885年有關氫原子光譜系列的資料，當時這份資料立即觸動了波耳對微觀系統的原子模型圖象有了一番新的面貌，進而提出波耳的氫原子模型。以下就是模型的基本假設：

一. 電子繞核運轉的軌道角動量為量子化分佈： $L_n = n\hbar$ （量子性假設）

二. 定態的假設（量子性假設）

波耳認為微觀系統（氫原子）內的電子是存有不連續的定態能階的，電子只允許進駐在這些特定的能階上，而所謂的定態就是當電子處在該能階時不會釋放電磁能量而塌陷到原子核心，這是物理事實，也是電子處在微觀系統中必有的強制性條件。德布羅意於1924年利用軌道物質波的駐波條件定性說明了定態的存在，而完整的理論要由量子力學(1926)才能獲得解決。

三. 躍遷機制與頻率條件（量子性假設）

⁴ On the Constitution of Atoms and Molecules. Phil.Mag. 26(1913)

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

波耳認為若原子在不同定態間進行躍遷，那麼原子將會釋放電磁輻射，由愛因斯坦的光子論配合光譜的頻率條件，波耳給出輻射的電磁頻率與能階間能量差的關係：

$$\nu_{mn} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

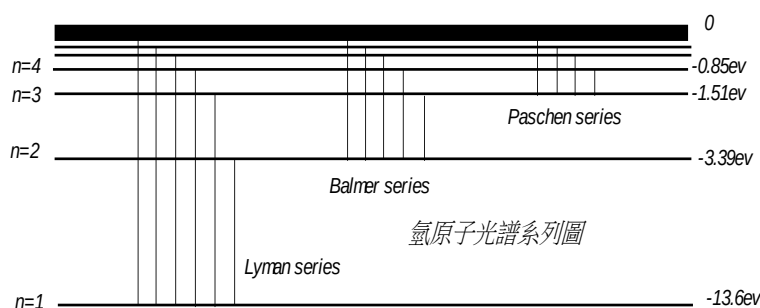
四. 對應原理(Corresponding principle) (量子假設)

波耳認為當一個不連續系統的量子數 n 很小時，系統的量子化效應是非常重要的，但量子數 n 很大時，這個系統將回歸古典的連續分佈的結果。另一種等價說法是，如果普朗克常數 h 不能視為零，那麼系統呈現量子化效應，反之，若 h 被視為零，那麼系統將回歸古典極限。

由波耳所提的基本假設，發現模型中電子在軌道的能量，軌道半徑，速率與角

動量都是量子化分佈的，這是微觀系統的粒子特有的力學現象，它顛覆了長久以來古典物理認為所有物理量連續分佈的認知。有別於古典電磁理論認為加速或被減速的帶電粒子會釋放電磁輻射，波耳所提躍遷與頻率條件，成功的解釋了原子光譜系列的成因，而對應原理將古典輻射與量子躍遷連結在一起，說明古典輻射只是量子躍遷在大量子數下的回歸結果。當進行輻射光譜實驗，大量的受激原子由高能階雜亂，無規則的跳回低能階的過程，釋放出所有的光譜系列。室溫下幾乎所有的氫原子都處在基態能階，高能階幾乎沒有原子進駐，若此時進行吸收光譜實驗，那麼原本處在基態的原子將吸收特定波長的電磁能量由基態跳到高能階，感光片上只會測到被原子吸收的萊曼系列(Lyman series)光譜，這就是為何輻射光譜比吸收光譜複雜，吸收光譜只是輻射光譜中某些特定譜線的重疊譜線的原因。1914年法蘭克與赫茲(Franck-Hertz)進行測量汞蒸汽的游離能實驗，意外的測到汞原子基態與第一激發態的能差為4.9 eV，由光譜分析又測到對應的253.6 nm的紫外光，這實驗結果第一次證實了波耳的量子化與躍遷的基本假設。隨著1915年測到氫原子萊曼系列光譜($m=1, n=2, 3, \dots$)，1922年測到氫原子布拉克系列光譜(m

= 4, n = 5, 6, 7, ...)，1924年測到氫原子普亨德系列光譜(m=5, n=6, 7, 8, ...)，這些系列光譜的發現與波耳的預測完全吻合，更確立了波耳氫原子模型的正確性（見圖五）。雖然波耳氫原子模型在物理獲得巨大成就，但因為模型太借助圖象化，造成波耳模型無法再繼續解釋其它的實驗現象，例如光譜線與光譜線間的相對強度，多電子原子光譜的分佈以及原子的精細結構分裂現象等。雖然如此，波耳所提出的微觀系統的定態、躍遷、頻率條件、對應原理與角動量量子化等新的觀念，為量子物理注入了活水，更為爾後海森堡矩陣力學（量子力學的第一種形式）的誕生開拓了窗口。



圖五：氫原子能階分佈與光譜序列

柴、德布羅意的物質波假說⁵

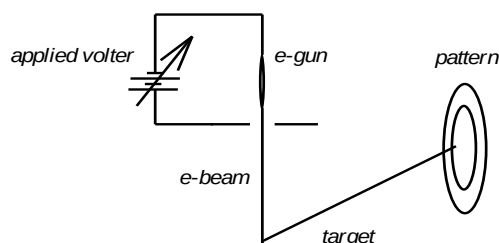
1923 年法國物理學家德布羅意(Louis de Broglie)寫了一封信給愛因斯坦，信中提到：『電磁輻射具有波與粒子的樣子，那麼運動中的粒子也應該具有波與粒子的二象性質』，愛因斯坦對德布羅意的這個構想大為激賞，認為這個想法是正確的，德布羅意就在愛因斯坦的鼓勵與加持下提出了著名的『物質波假說』的論文。假說中提到一個以動量 p ，能量 E 運動的質點在運動過程中伴隨著頻率 ν 與波長 λ 的波動，此稱物質波。德布羅意直接利用了愛因斯坦的電磁輻射公式將物質波與質量粒子的二象性質聯結。

$$\text{即： } p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k, \quad E = h\nu = \hbar\omega$$

⁵ Recherches sur la théorie des quanta (Researches on the quantum theory), Thesis, Paris, 1924.

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

1927 年美國與英國的兩組物理學者分別進行了反射式（Davisson-Germer）與穿透式（G.P. Thomson）的電子束晶體繞射實驗，同時驗證了物質波的存在，而後更多的實驗陸續測量到 neutron，質子...的波動性現象，確立了德布羅意物質波假說的正確性。



圖六：電子束晶體繞射實驗裝置圖

自1913布拉格(Bragg)父子提出X射線的晶體繞射公式後，利用X射線研究晶體結構的實驗一直為材料科學研究中重要的手段。由X射線的晶體繞射圖案，可了解晶格的間距與晶體的結構。1927年戴維斯-革末的實驗（見圖六）構想是將x-ray光源換成了加速的電子束，適當的控制入射電子的能量使其對應的物質波長 λ 與晶格間距 a 同等級(約1埃)，如果電子真的具有波動性，那麼反射區的屏幕上應該可觀察到與x-ray一樣的晶體繞射圖案，只不過屏上所記錄的是電子被繞射後的分佈結果。他們選用單晶的鎳鉍，晶格間距 0.91Å ，電子的加速電壓54V，對應的物質波長為 1.67Å ，由布拉格繞射極大條件： $2a\sin\phi = n\lambda$ ，理論預測繞射第一極大發生時入射波與晶面的夾角為 $\phi \cong 67^\circ$ ，實驗中在轉動鎳鉍晶面方向的過程中，的確可清楚的測到 $\phi \cong 67^\circ$ 時反射區出現繞射極大，而電子的鎳鉍晶體繞射圖案與用x-ray所進行的繞射圖案幾乎完全吻合，這個實驗的結果直接證實了電子的波動性現象，明暗相間的繞射圖案是因為波動性的相位疊加所造成的結果。同一時間，英國的湯姆生利用高能量的電子束進行穿透式的電子束晶體繞射，他選用多晶的薄靶進行繞射實驗，同樣也證實了電子是具有波動性。戴維森與湯姆生因證實物質具波動性的實驗於1937年共同獲得了諾貝爾物理獎。

捌、矩陣力學與不確定性原理⁶

1924-1925年間海森堡(W. Heisenberg)在丹麥與波耳從事研究工作，他認為波耳所提出的微觀系統的力學量在測量下是具有不確定性的，微觀系統的不確定測量特性與巨觀世界的精確測量結果不同，例如電子繞核運轉的『軌道』是不確定的。那麼微觀系統的力學量的數學形式該如何寫出？為解決這個難題，海森堡給出『可觀測的力學量』的概念，他認為凡是可觀測的力學量在物理才有意義，只有可觀測的力學量才有數學上的表達形式。在這個前題下，海森堡由氫原子光譜的不連續性與強度分佈關係於1926年初提出了『矩陣力學』(量子力學的第一套版本)，同時也給出了一些可觀測的力學量的矩陣數組，這些矩陣能正確的預測電子躍遷時所發出的光子強度，起初他並不了解這些數組間的關係，於是去請教他的博士後指導教授波恩(M. Born)，波恩正確的看出這些矩陣數組之間是吻合矩陣乘法的運算規則的，並認為由位置 $\hat{x}$ 與動量 $\hat{p}$ 兩個基本矩陣的乘法運算規則可創造出其它可觀測的力學量矩陣。而另一重要發現是位置 $\hat{x}$ 與動量 $\hat{p}$ 之間不適合乘法的交換律(Commute)，它代表的物理意義是什麼？海森堡與波恩當時並不清楚其中的含意。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \neq 0$$

受到波恩(M. Born)於1926年所提出的波函數機率統計論(statistical probability interpretation)的影響，海森堡認為矩陣力學中力學量的矩陣運算規則與波函數的機率論在本質上有某些對應的關係，由空域與頻域的互補性(Complementary)，微觀系統中測量質點的位置與動量時也應符合這種互補關係，這就是海森堡對不確定性原理最原始的想法。波耳認為海森堡的不確定性論述是正確的，這其實是反映了波與粒的二象性的本質互補關係。海森堡於1927年正式提出了微觀系統的不確定性原理的啟發性表述(又稱不確定性原理)，1927年肯納德(E.H. Kennard)由矩陣力

⁶ 《Remarks on the origin of the relations of uncertainty》(出自台大物理系系刊《時空》第23期)

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

學為這表述給出了最終的版本 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ ，1929年羅伯森由力學量算符的交換律運算規則中再次推導出不確定原理。不確定原理是矩陣力學最重要的理論基礎，它不僅強化了矩陣力學的最初假設的正確性(力學量量測的結果是不確定的)，同時更擴展了它的可用性。在這裡我們可以為矩陣力學下一個註解，那就是矩陣力學是一個與測量有關，描述微觀系統力學現象的一種不確定性的力學。

除了由矩陣力學可推導出不確定性原理，波動的本質特性也能推導出不確定性原理。由富立葉轉換，信號 $\psi(x)$ 與頻域 $\phi(k)$ 兩個domain的頻寬是存有互補性質的，如果信號被限制的區域 Δx 越寬，組成信號的基本波數的頻寬 Δk 就越小；反之，如果信號被限制的區域 Δx 越窄，那麼組成信號的基本波數的頻寬 Δk 就越大，也就是說對任何波動而言 Δx 與 Δk 成反比關係($\Delta x \Delta k \sim 1$)。在解釋不確定性原理時，高斯函數是非常重要的函數，對空域(x)的高斯函數做富氏轉換其頻域(k)還是高斯函數，若以測量的標準差 σ 為統一的估計依據，那麼高斯函數的空間-波數標準差乘積 $\Delta x \Delta k = 1/2$ ，這與非高斯函數的其他函數比較，高斯函數的標準差乘積是所有函數中最小者，這個數學上的重要結果提供了一個不能比高斯函數更精確的條件，那就是對所有函數而言，標準差乘積將遵守 $\Delta x \Delta k \geq 1/2$ 的條件。若將德布羅意的物質波假說代入上式，即得到不確定性原理

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad (\text{量子效應})$$

同理，由時間與頻率的互補性知： $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ （量子效應）上式表明若要精準的測量粒子的動量，則必定無法同時精準的測量出粒子的位置；反之，若要精準的測量粒子的位置，則無法同時精準的測量粒子的動量。同理，若要精準的測量粒子的能量，則要花費極長的測量時間；反之，測量的時間越短，則必定測出不準的能量。因為古典粒子的質量大，當使用不確定原理時，完全感受不到位置與動量不準關係，但量子性粒子的質量小，測量時將立刻感受到位置與動量之間的不確定性關係，這與普朗克常數 h 有密切關係，古典測量時我們可將 h 視為零，

量子測量時 $h = 6.63 \times 10^{-34} \langle J \cdot s \rangle$ 不可視為零。海森堡認為巨觀世界的測量因待測物的質量大，物體與儀器之間是獨立的個體，所以測量的值都是精確的，但微觀系統的測量，待測粒子因質量小，在粒子與儀器間的相互干擾下造成測量的不確定的結果，上述稱為『海森堡表述』。另一種說法為『肯納德表述』，肯納德認為不確定性原理與測量動作無關，不確定性原理是波粒二象性的天生法則，它說明了無論何種測量，都無法同時將位置與動量的乘積壓縮到 $\hbar/2$ 的最小條件，事後證明兩種表述其實是等價的。附帶一提，1927年海森堡發現這原理的德文用詞是 Unbestimmtheit，對應英文用詞是 Indeterminacy，1930年海森堡到美國芝加哥演講用詞是 Uncertainty。早期我國的學者為強調測量的不確定性，將英文 Uncertainty 翻譯成中文為測不準原理，這翻譯其實並不恰當，原因是海森堡這個原理不只與測量有關，它也是波粒二象性的必然結果（肯納德表述），近代的華人社會（台灣，中國大陸，香港，新加坡..）大多數已將測不準原理更改成不確定性原理，這樣才符合這個原理的原始涵意 Indeterminacy。

玖、波動力學與波函數的機率統計詮釋⁷

1926年奧地利的物理學者薛丁格(E. Schrodinger)在一次報告中提到，德布羅意的物質波假說可以解釋波耳的軌道角動量量子化假說，他的老師迪拜(Debye)會後說”有波，就應該有波動方程式才對，這樣才能成為一套完整的理論”。薛丁格在迪拜的激勵下，由古典的哈爾米頓力學(Hamiltonian mechanics)出發成功的推導出波動與粒子性兼顧的物質波波動方程式，並首先利用這條方程式求解氫原子中電子的波函數，獲得比波耳模型更正確完備的氫原子的量子模型，物質波的假說也由這條方程式跨越至『波動力學』（量子力學的第二套版本）的新世代。薛丁格另一個重要貢獻是他證明了波動力學與矩陣力學的等價性，兩套力學其實是完全等價的，只是數學的表達方式不同罷了，這個重大成就確立了波動力學與矩陣力學的

⁷ Max Jammer The Conceptual Development of Quantum Mechanics (McGraw-Hill, 1966)

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

正確性，更為爾後量子力學的誕生給出了理論的依據。附帶一提，矩陣力學與波動力學分別於 1926 年初與年底被提出，因當時的物理學者對矩陣運算並不熟悉，矩陣力學最初並未獲得太多人的注意，直到不確定性原理的提出才獲得重視。因人們習慣用微分方程的數學運算模式處理物理問題，所以薛丁格波動力學的提出在當時立刻獲得了廣大的回響。

$$\text{薛丁格波動方程式：}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r},t)\right\}\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)\quad(\text{非相粒子適用})$$

1926年底薛丁格陸續發表了多篇有關波動力學的重要論文，論文中雖給出了波函數隨時空的演化的關係，但對波函數所代表的物理意義卻不甚清楚。同時間，波恩(M. Born)提出波函數的統計詮釋，描述波動力學中的波函數物理意義，波函數的絕對值平方 $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ 表示在時間 t 時，單位體積中粒子出現或被測到的機率，這個統計詮釋最後在量子力學的理论發展中確立了主導地位。當時大多數的物理學者因沿襲了古典物理一貫的絕對因果論思維，起初波恩的統計詮釋受到許多的質疑，但很快的大家瞭解到波函數的統計詮釋其實與不確定性原理是相互一致的，這也是量子力學有別於古典力學的最重要的特色。波恩的另一重要貢獻是看出海森堡的數組及其乘法運算就是矩陣及矩陣乘法運算，確立了海森堡矩陣力學的數學結構的正確性。波恩不是量子力學理論的創造者，但他絕對是量子力學理論建構過程中最重要的奠基者，1954年波恩終於獲得諾貝爾物理獎，愛因斯坦寄了封信給他，說道：『你因對量子力學的理论奠基貢獻而獲獎，真為你感到高興，雖然這獎來的莫名其妙的遲』。

若將一個方程式所得到的各個解做線性疊加的結果還是原方程式的解，數學上稱此方程式為線性方程式，古典物理中最具代表性的例子就是電磁波的偏振態符合線性疊加的現象。薛丁格方程式是一個線性方程式，不隨時變的薛丁格方程式也是線性方程式，因此波函數(wave function)或本徵波函數(eigen-function)也都適合線性的疊加性原理(費曼稱上述為量子力學的第一原理)，量子力學稱這種狀態

為『疊加態』(Mixing state)。其實疊加態可視為一個向量，它是由彼此正交的基底向量集合(completely set)分別乘上權重後的疊加結果。對連續譜而言，疊加態函數就是富氏轉換，描述在空間行進的自由波包；對不連續譜而言，疊加態函數就是被限制在一個範圍內的束縛態波包。由波函數的機率統計詮釋，粒子處在疊加態時測到各個本徵值的機率都存在，測量的總機率為1，若測量時某一特定狀態被選擇出來，則其他的狀態將消失，這現象稱『波函數塌陷』(wave collapse)。以光學為例，偏振態可由兩組彼此垂直的線偏振極化光的線性疊加組成。當用一檢偏鏡篩選讓某一線偏振方向的光通過，而另一偏振方向的光波將被濾掉，通過的光強度與檢偏鏡的偏角有關($I = I_0 \cos^2 \theta$)，量子力學不稱之為通過的強度，而以通過的機率描述。值得一提的是薛丁格認為 $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ 代表電子的質量密度的分佈，並非波恩的機率密度(Probability density)解釋，這想法因為行進的物質波包會快速的擴散而做罷。薛丁格也提出『薛丁格的貓』的思想實驗，以巨觀事實結果以說明疊加態在測量後的『波函數塌陷』現象是不正確的，但信者恆信，這個思想實驗最終成為一個詭辯。薛丁格雖是波動方程式的提出者，但他始終不接受波函數的機率統計詮釋，這不是對錯的問題，而是個人對物理認知的信仰問題。

拾、單電子雙縫干涉實驗與互補原理⁸

古典的波動能量擴展在波前，由相位疊加說明了繞射、干涉圖案能量分佈的波動性質。古典粒子的能量是集中在一個點上，藉由能量與動量的轉換關係說明了粒子與物質作用的力學現象，古典物理的波與粒子是獨立不相關的兩種個體，兩者不能統一到同一個客體上。那麼我們要問量子的波粒二象性的波動性質是否與古典的波動相同？粒子性是否與古典的粒子行為相同？為說明物質波到底是什麼波動，最經典的例子就是費曼(R. P. Feynman)所提出的『單電子雙縫干涉實驗』

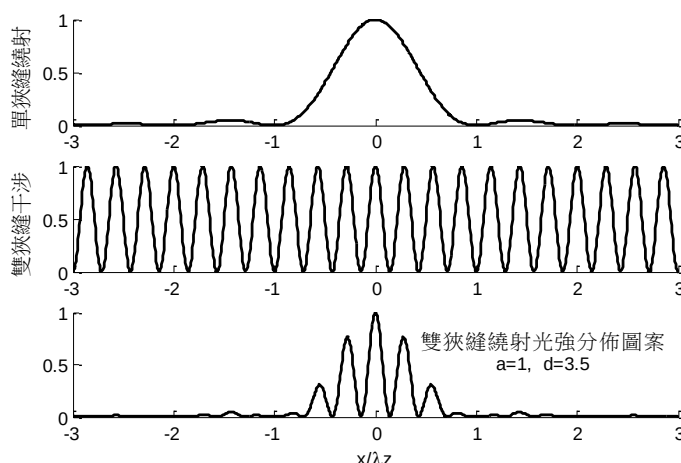
⁸ Max Jammer The Conceptual Development of Quantum Mechanics (McGraw-Hill, 1966)和 Herzog, Thomas; et al.. Complementarity and the Quantum Eraser. Phys. Rev. Lett. 1995, 75: 3034–3037. doi:10.1103/PhysRevLett.75.3034

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

(8) 的思想實驗，將一顆顆能量相同的電子陸續射入雙狹縫儀器，屏幕上記錄了電子通過狹縫後的分佈，由實驗安排與過程中圖案的演化結果來驗證量子力學所建構的理論是否正確，這個思想實驗最先於 1961 年由約爾森(Jonsson)所製做設計的單電子雙縫干涉儀獲得了實現。

波長 λ 的光波入射至狹縫間距為 d 的雙狹縫底片，由惠更斯原理(光的波動說)知狹縫透光的區域如同兩條線光源(可視為兩點光源)，而狹縫所發射的光場在遠處 L 的屏幕上進行波前的疊加造成明暗相間的條紋，這現象稱為楊氏的雙狹縫干涉實驗(1798 年)(見圖七)，由理論可推得屏上所記錄的光強度分佈：

$$I(y) = |\psi|^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right)$$



圖七：雙狹縫繞射圖

上式 $\psi = \psi_1 + \psi_2$ 為屏上的光場分佈， ψ 為 ψ_1 與 ψ_2 的疊加態波函數⁹。

現在我們將能量相同的電子一顆顆的射到雙狹縫干涉儀，在遠方的屏幕上安裝了一排的感測器為記錄電子的分佈與數目。實驗初期入射電子數目很少，屏上測得電子是隨機，雜亂無規則的分佈，當入射電子的數目繼續增加，屏上電子的分佈漸漸出現規則性，在長時間的實驗記錄下，最後電子的分佈與雙狹縫的干涉圖案（強弱相間的干涉條紋）完全相同，只是屏幕上記錄的是電子的數目分佈。

⁹ ψ_1 、 ψ_2 分別為兩狹縫所發出的光波在屏上的光場波函數

類似光的波動性質，這個實驗可明顯的看出電子的確是具有波動性，兩個狹縫所發出的波動在屏上的疊加態波函數 $\psi = \psi_1 + \psi_2$ ，表明波幅的絕對值平方 $|\psi(r,t)|^2$ 與電子的數目分佈成正比關係，驗證了波恩的波函數機率統計詮釋的正確性，同時也清楚的連結了波與粒的二象性質。實驗中若想測量電子是通過那個狹縫後打在屏幕上的，可以在其中一個狹縫的後方安裝一個可調的光源，若實驗測到散射光的信號表示電子通過該狹縫，如果沒有測到散射光的信號表示電子由另一個狹縫通過，這樣的安排將可清楚的測到電子的粒子性，但此時也我們也將會發現屏幕上的干涉條紋消失了，它呈現的是狹縫 1 與狹縫 2 在無干涉下的圖案 $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ ，現在若將光源慢慢的調暗，此時屏幕上的干涉條紋又漸漸出現，但強弱條紋的對比度小於 1（強的區域有電子出現，弱的區域也有少量的電子出現）。若關閉光源，干涉條紋將清楚呈現，此時強弱條紋的對比度為 1（強的區域有電子出現，弱的區域沒有電子出現），這說明了在測量粒子性時將必定打擾電子，若對電子的打擾越大就是彰顯了電子的粒子性，同時抑制電子的波動性。反之，若對電子的打擾越小就是抑制了電子的粒子性，反而彰顯了電子的波動性，這現象說明了波與粒是具有互補性質的。1926 年當海森堡寫信告訴波耳有關不確定性原理的啟發性表述時，波耳的直覺認為這是波粒二象性的必然結果，為強化二象性的哲學論述，1927 年波耳提出了『互補原理』(complementarity principle)⁽⁹⁾。互補原理闡明微觀系統內粒子的波動性與粒子性互補，我們不能只用單獨一種概念（波或粒）清楚地描述整體量子的現象，若要完備的描述整體量子現象，必須分別將波動與粒子性的概念都含括在量子系統內。所以由單電子雙縫干涉實驗，我們可以肯定的說波粒二象性的粒子不是古典粒子，波動也不是古典的波動，波與粒的二象性可以統一到同一個客體上將連結，量子力學對物質波的最佳的詮釋：『物質波是一種機率波』。

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因

結論

如果說波耳的微觀系統內粒子的力學特性假說為海森堡的矩陣力學（量力的第一種型式）的誕生開拓了窗口，那麼德布羅意的物質波假說就是為薛丁格的波動力學（量力的第二種型式）的誕生開拓了另一扇門。雖然『矩陣力學』與『波動力學』是由不同的兩條路徑所得到的兩套力學，起初這兩個看似不協調的理論，最後發現其實是同一件事，只是描述的方式不同罷了，在不確定原理與波函數的統計詮釋的基礎下這兩套力學其實是完全等價的，這奇妙的結果是偶然，也是必然，這就是為何量子力學如此吸引人的原因。1927『哥本哈根學派』(統計因果論, 代表人物:波耳、波恩、海森堡、德布羅意、包立、狄拉克,...)漸漸形成，並開始與絕對因果論的物理學者論戰(代表人物:愛因斯坦、羅素,...)，這是一場物理的信仰論戰，在兩邊來往論戰下哥本哈根學派漸漸佔得上風，而後更確立了『量子力學』學門的理論與哲學架構，完整的量子力學理論與延伸從此正式展開。筆者認為量子力學為廿世紀科技發展中最重要，對未來影響最為深遠的理論，更可以這樣說，沒有量子力學就沒有現代科技的創新與發展。最後，在此為量子力學做下注解，那就是『量子力學是機率論力學, 不確定性的力學，與測量有關的力學，量子力學是在不確定性原理與波函數的機率統計詮釋的兩大基石上所建構的學門』。

參考文獻

1. Rybicki & Lightman 1979. p.22
2. Serway, Raymond; Jewett, John. Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th. Cengage Learning. 2013. p.1194
3. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom, 21. May 1911: p. 669-688
4. *On the Constitution of Atoms and Molecules. Phil.Mag.* 26(1913)
5. *Recherches sur la théorie des quanta* (Researches on the quantum theory) ,Thesis, Paris, 1924.
6. 《Remarks on the origin of the relations of uncertainty》（出自台大物理系系刊《時空》第 23 期）
7. Max Jammer *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1966)
8. Herzog, Thomas; *et al.*. Complementarity and the Quantum Eraser. Phys. Rev. Lett. 1995, 75: 3034–3037. [doi:10.1103/PhysRevLett.75.3034](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3034).
9. 1. Niels Bohr. Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics//In P. Philosopher-Scientist. Open Court. 1949.

是偶然也是必然-這就是為何量子力學如此吸引人的原因